《集合论与图论》期末复习

VectorPikachu

December 29, 2025

1 图的基本概念

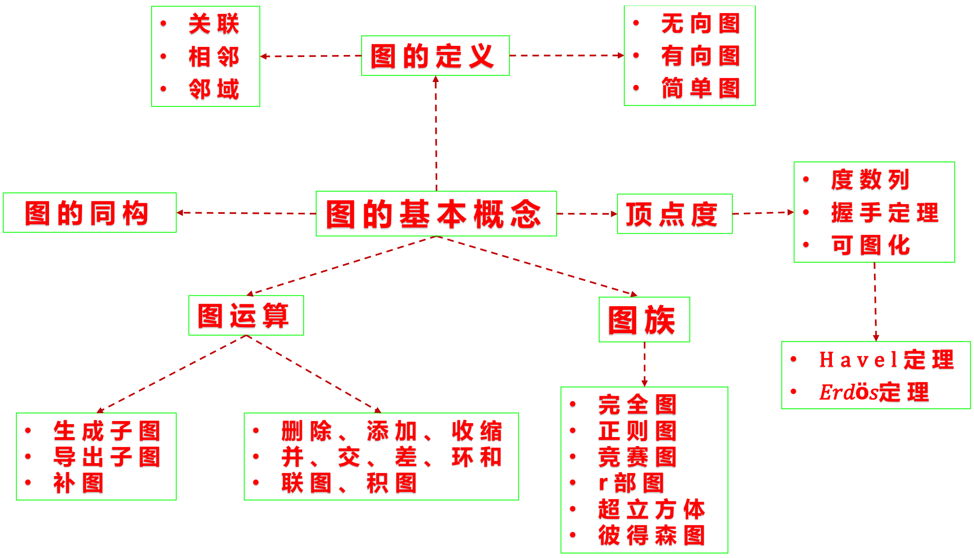

Figure 1: 图的基本概念示意图

- $\delta(G)$: 最小度, $\Delta(G)$: 最大度.
- 握手定理: $\sum_{v\in V(G)} d(v) = 2\,|E(G)|$.
- 可图化 $\Leftrightarrow d_1 + d_2 + ... + d_n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2)$.
  可简单图化 $\Leftrightarrow$ Havel 定理或者 Erdős-Gallai 定理.
- 图同构, 即存在双射 $f : V(G) \to V(H)$, 使得 $(u, v) \in E(G) \leftrightarrow (f(u), f(v)) \in E(H)$.
- 4-顶点的标定图个数 $2^6 = 64$ 个, 构成 11 个同构类.

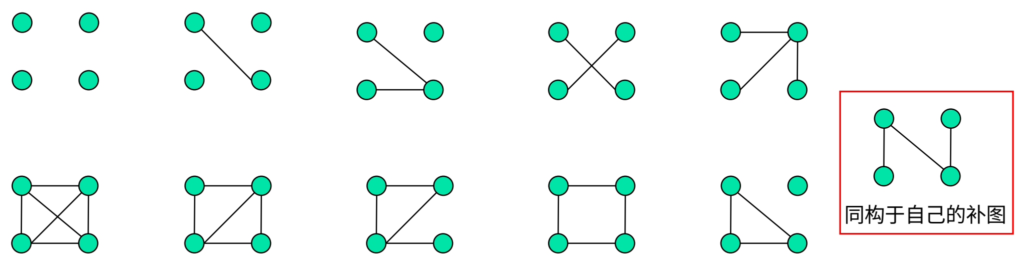

Figure 2: 4-顶点图的同构类

  其中和自己同构的图称为自同构图, 4-顶点的自同构图有 1 个.
- 完全图, 柏拉图图 (点正则且面正则), 彼得森图 (10 个顶点, 15 条边, 3-正则, 无桥, 无三角形, 半哈密顿, 非欧拉, 围长 $g = 5$, 周长 $c = 9$, 直径 $d = 2$, $\kappa = 3$, $\lambda = 3$, $\chi = 3$, $\chi' = 4$, $\alpha_0 = 6$, $\alpha_1 = 5$, $\beta_0 = 4$, $\beta_1 = 5$, $\nu_0 = 2$, $\gamma_0 = 3$, 圈秩 $\xi(G) = 6$, 割秩 $\eta(G) = 9$).
  二部图=偶图.
  生成子图要求包含原图的所有顶点, 但只包含部分边.

- 并图, 交图, 差图, 环和.
  联图: G 和 H 的联图 $G+H$ 是指
  $V(G+H)=V(G)\cup V(H)$, $E(G+H)=E(G)\cup E(H)\cup V_1\&V_2$. $N_r+N_s=K_{r,s}$.
  积图: G 和 H 的积图 $G\times H$.

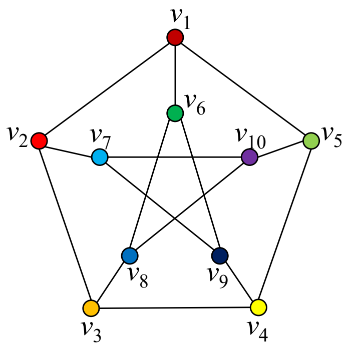

Figure 3: 彼得森图

2 图的连通性

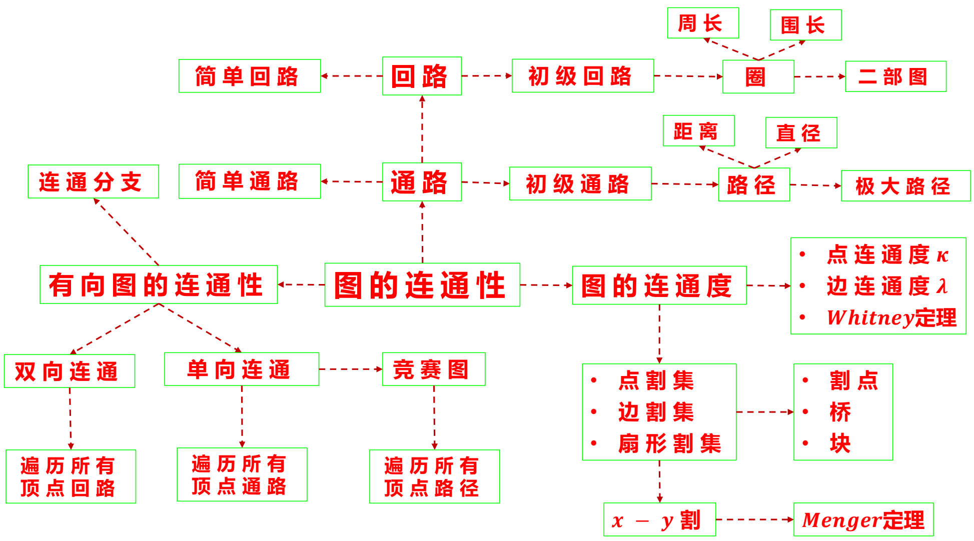

Figure 4: 图的连通性示意图

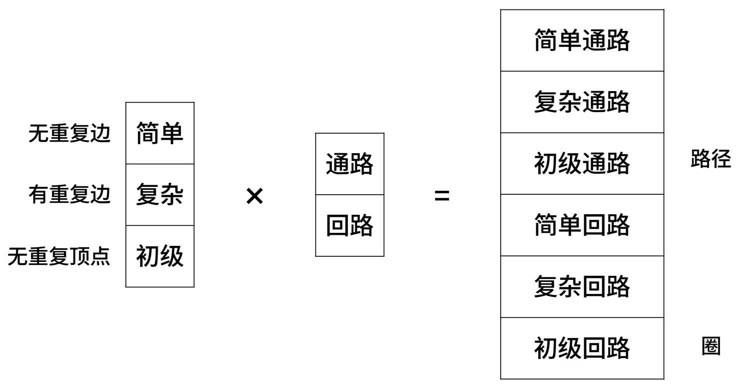

Figure 5: 通路与回路示意图

- 简单 = 无重复边, 复杂 = 有重复边, 初级 = 无重复顶点.
- 周长 (Circumference) $c(G)$: 图 G 中最长圈的长度.
  围长 (Girth) $g(G)$: 图 G 中最短圈的长度.

- $v_i \to v_j$ 有通路, $v_i \to v_j$ 有长度小于等于 $n-1$ 的通路 (路径).
- v_i 到自己有回路, v_i 到自己有长度小于等于 n 的回路.
  v_i 到自己有简单回路, v_i 到自己有长度小于等于 n 的圈.
- 扩大路径法.
  - 证明无向图有 $\geq \delta(G)+1$ 的圈.
  - 证明有向图有 $\geq \max\{\delta^+(G), \delta^-(G)\}+1$ 的有向圈.
  - 证明各圈长度的最大公约数为 1 或 2.
- 连通关系是等价关系.
- 连通 $\Rightarrow m \geq n-1$.
- 图 G 不连通, 则 $\overline{G}$ 连通.
- 短程线(测地线), 直径 $d(G)$: 图 G 中任意两点间最长的最短路径长度.
- **二部图 $\Leftrightarrow$ 无奇圈**
- 强连通(双向)、单向连通、弱连通

Theorem 2.1. *有向图 D 强连通 $\Leftrightarrow$ D 中有***回路***过每个顶点至少一次.*

注: 不一定有简单回路. 反例如下:

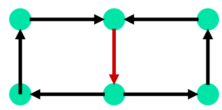

Figure 6: 有向图强连通但无简单回路反例

- 单向连通有向图中存在一顶点可达其他所有顶点.

Theorem 2.2. *有向图 D 单向连通 $\Leftrightarrow$ D 中有***通路***过每个顶点至少一次.*

注: 不一定有简单通路. 反例如下:

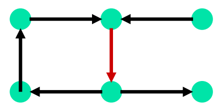

Figure 7: 有向图单向连通但无简单通路反例

- 竞赛图一定有初级通路(路径)过每个顶点恰好一次.
  可以先找到一条路径, 不断尝试扩展它, 直到包含所有顶点为止.
- 具有传递性的竞赛图一定不是强连通的.
- 点割集, 边割集, 割点, 桥, 点连通度 κ, 边连通度 λ.
- 边割集只能把连通分支加 1. $I_{G(v)}$ 一定有边割集.

Theorem 2.3. (Whitney 定理): *对任意图 G, 有: $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$.*

- 对 3-正则图, 有 $\kappa(G) = \lambda(G)$.
- $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$ 时, G 为连通图. 思路: 找到一个极大路径, 证明外面的点都能连到路径上.
- $\delta(G) \geq \frac{n+k-1}{2}$ 时, G 为 k-连通图.

Theorem 2.4. (Menger 定理): *在图 G 中: 最小的 $x-y$ 割包含的顶点数 $=$ 最大的互相独立的 $x-y$ 路径数.*

- 3 阶以上的图 k-连通, 则任意两个顶点间有 k 条互相独立的路径.
- 3 阶以上的图 k-边连通, 则任意两个顶点间有 k 条边不交的路径.
- 块: 极大 无割点 连通子图.

- 不同块的公共点一定是割点, 也即块可以按割点来寻找.
- 2-连通 $\subset$ 2-边连通
- 2-连通 $\subset$ 块. K_2 是块, 但不是 2-连通图.
- 块 $\neq$ 2-边连通. K_2 是块, 但不是 2-边连通图. 8 字形图是 2-边连通, 但不是块.

3 欧拉图与哈密顿图

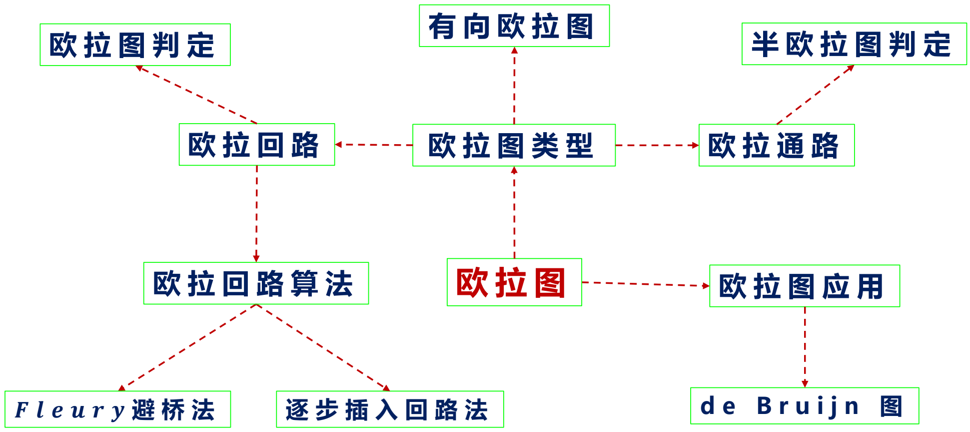

Figure 8: 欧拉图示意图

- 欧拉图的充要条件: 连通且所有顶点度为偶数.
- 半欧拉图的充要条件: 连通且恰有两个奇度顶点.
- 有向欧拉图的充要条件: 强连通且每个顶点的入度等于出度.
- 有向半欧拉图的充要条件: 单向连通且恰有一个顶点的出度比入度大 1, 一个顶点的入度比出度大 1, 其余顶点的入度等于出度.
- Fleury 算法构造欧拉回路/通路. 插入回路法构造欧拉回路/通路.
- de Bruijn 序列. E.g., 4 位序列, 顶点为 3 位, 有向边为 4 位, 每条边从前三位指向后 3 位. 注意: 有的不要求的边不要画. 然后求出一个欧拉回路, 每个边取最后一位.

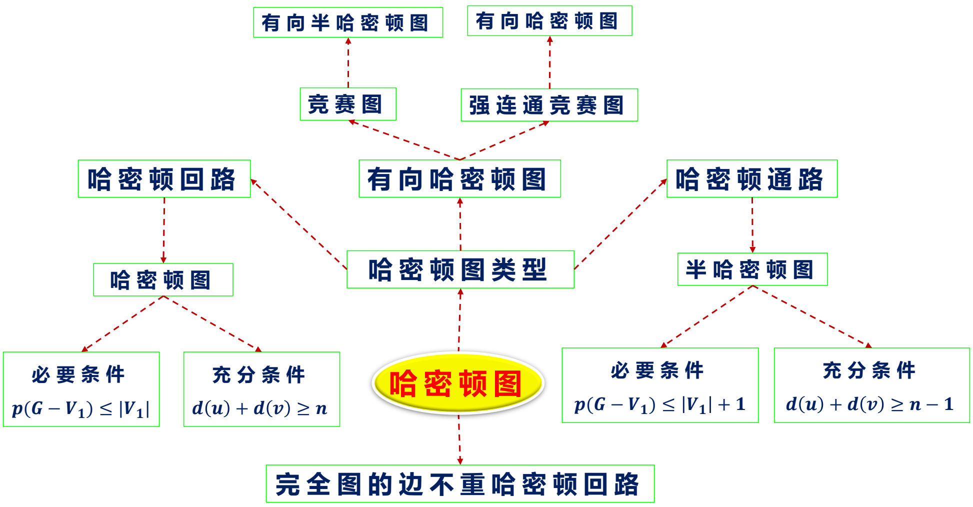

Figure 9: 哈密顿图示意图

- 哈密顿图 $\Rightarrow \forall V_1 \subset V, p(G-V_1) \leq |V_1|$.
- G 中任意不相邻顶点 $d(u)+d(v) \geq n \Rightarrow$ 哈密顿图.
  - 推论: $\delta(G) \geq \frac{n}{2} \Rightarrow$ 哈密顿图.
  - 注意: $\delta(G) \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 不一定是哈密顿图.

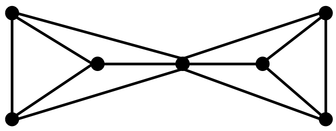

Figure 10: $\delta(G) \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 但不是哈密顿图反例

- 半哈密顿图 $\Rightarrow \forall V_1 \subset V, p(G-V_1) \leq |V_1|+1$.
- G 中任意不相邻顶点 $d(u)+d(v) \geq n-1 \Rightarrow$ 半哈密顿图.
- 竞赛图 $\Rightarrow$ 半哈密顿图.
- 强连通的竞赛图 $\Rightarrow$ 哈密顿图.

注意: K_{2k+1} 中同时有 k 条边不重的哈密顿回路.

K_{2k} 中同时有 $k-1$ 条边不重的哈密顿回路; 除此之外，, 下的是 k 条彼此不相邻的边.

4 树

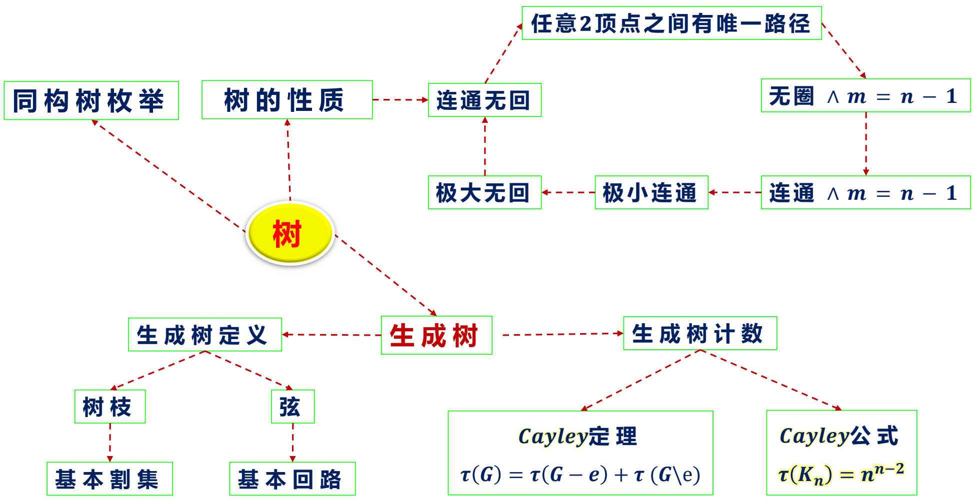

Figure 11: 树的基本概念示意图

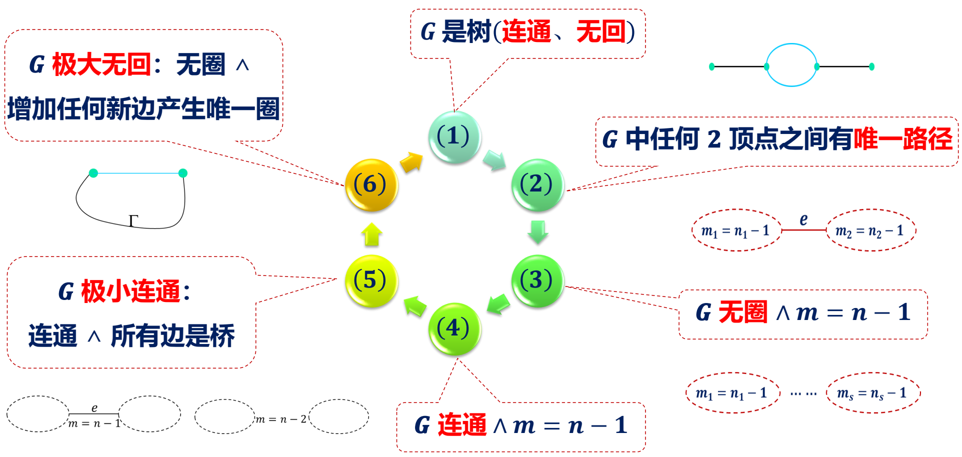

Figure 12: 树的等价定义

- 无向树的计数: t_n 表示 n 阶非同构无向树的个数.
  - $t_4 = 2$, $t_5 = 3$, $t_6 = 6$, $t_7 = 11$, $t_8 = 23$, $t_9 = 47$, $t_{10} = 106$.
- 生成树: $n-1$ 条树枝, $m-n+1$ 条弦.
  - 基本回路: 每条弦与生成树唯一确定一个基本回路. 圈秩: $\xi(G) = m-n+1$.
  - 基本割集: 每条树枝与生成树唯一确定一个基本割集. 割秩: $\eta(G) = n-1$.

- Caylay 定理: $\tau(G)=\tau(G-e)+\tau(G\setminus e)$.
- 树的 Prüfer 编码: 第 i 步删除当前最小叶子节点, 记录其邻接点, 共删除 $n-2$ 步.
  - 从 Prüfer 编码恢复树: 统计每个节点在编码中出现的次数, 出现 k 次则度为 $k+1$. 初始化所有节点的度数, 然后依次连接当前最小的度为 1 的节点与编码中的节点, 最后剩下两个度为 1 的节点相连.
  - K_n 的生成树数目 n^{n-2}.

计算 $\tau(K_n-e)$: K_n 的每个生成树里含有 $n-1$ 条边, 每条边在相同数量的生成树中出现. 因为 K_n 有 $\frac{n(n-1)}{2}$ 条边, 所以每条边在 $2n^{n-3}$ 棵生成树中出现. 因此 $\tau(K_n-e)=n^{n-2}-2n^{n-3}=(n-2)n^{n-3}$. $\tau(K_n\setminus e)=2n^{n-3}$.

5 图的矩阵表示

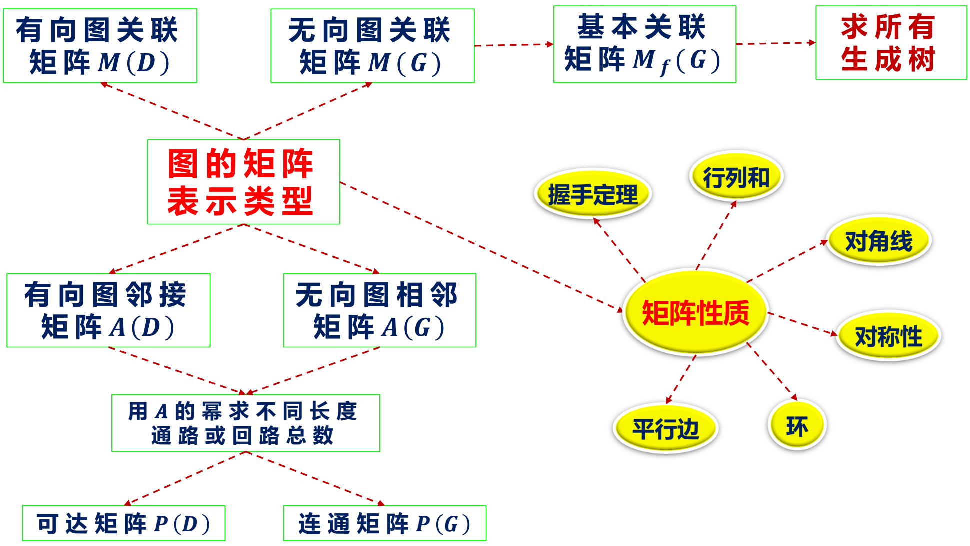

Figure 13: 图的矩阵表示示意图

- 关联矩阵, 基本关联矩阵.
  - 用关联矩阵求所有生成树: 对基本关联矩阵的任意 $n-1$ 行和 $n-1$ 列求行列式, 绝对值非零的子式对应一棵生成树.
- 邻接矩阵. 用来求长度为 k 的通路数: $A^k[i,j]$.
- 相邻矩阵: 只记录是否相邻.
- 连通矩阵, 可达矩阵.

6 平面图

- 极大平面图 $\Leftrightarrow \deg(R)=3$
- 极小非平面图: $K_5, K_{3,3}$
- 面的握手定理: $\sum_{i=1}^{r}\deg(R_i)=2m$
  - 树 T, $|T|=n$, $\deg(T_0)=2(n-1)$
  - 一棵 n 阶树, 随意添加一条弦, 构成一个平面图, 该平面图的外部面最大可能达到的次数是 $2n-3$.
- 欧拉公式: $n-m+r=2$, $n-m+r=1+p$
- 各面次数至少为 $\ell\geq 3$, 则: $m\leq (n-2)\frac{\ell}{\ell-2}$, $m\leq(n-p-1)\frac{\ell}{\ell-2}$, $m\leq 3n-6$.
- Kuratowski 定理: 图 G 平面图 $\Leftrightarrow$ G 中不含有 K_5 或 $K_{3,3}$ 的同胚子图 (或是没有可以边收缩到K_5 或 $K_{3,3}$ 的子图).

注意: $G_1\cong G_2$, 不一定有: $G_1^*\cong G_2^*$. 下面是一个反例:

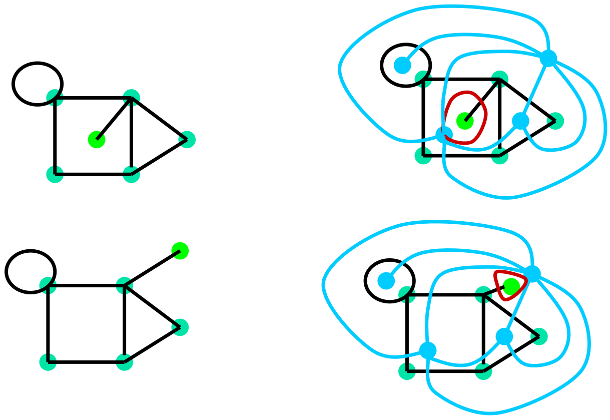

Figure 14: 对偶图不一定同构反例

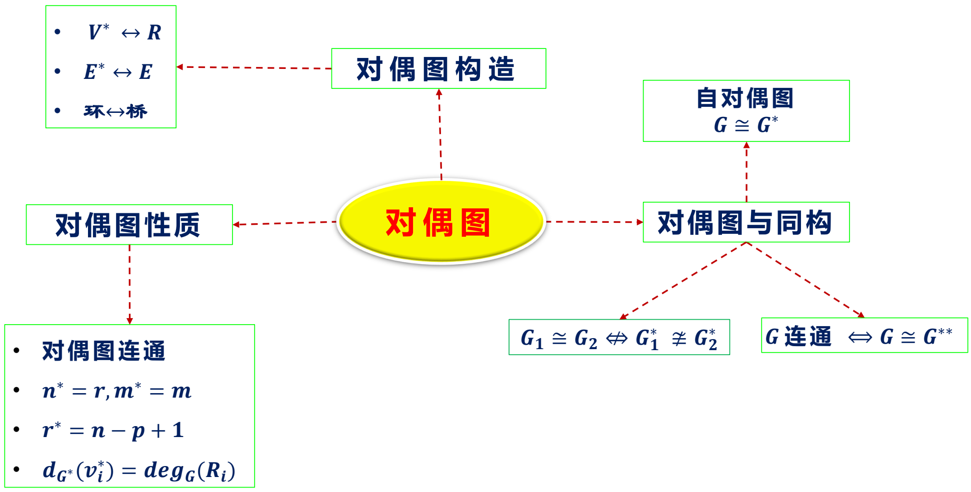

Figure 15: 对偶图示意图

- G 连通 $\Leftrightarrow G \cong G^{**}$.
- $n \geq 4$ 时, 轮图是自对偶图.

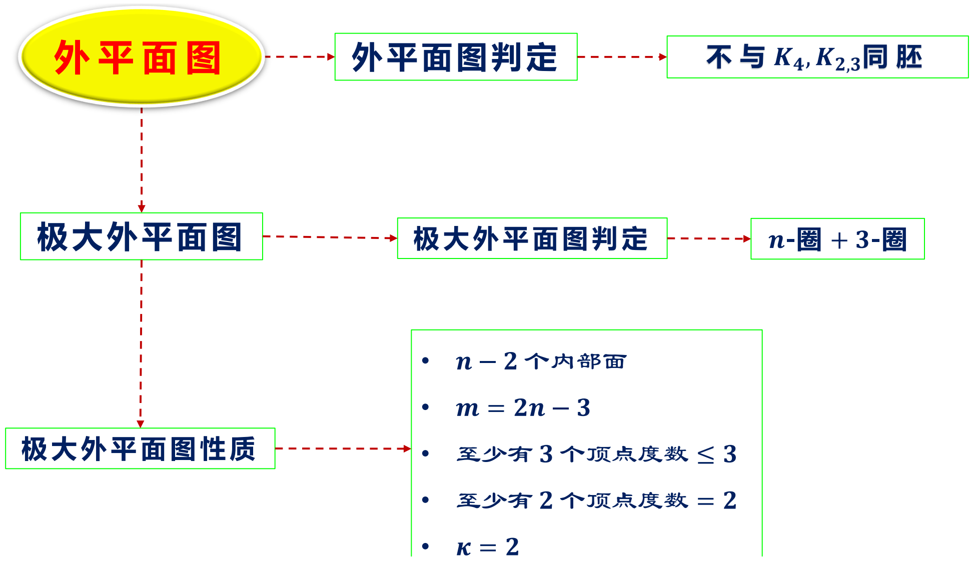

Figure 16: 外平面图示意图

- 外平面图: 平面图的所有顶点可都在一个面的边界上.

- 所有顶点在外部面边界上的极大外平面图充要条件: G 外部面边界是 n-圈, 其余面都是三角形.

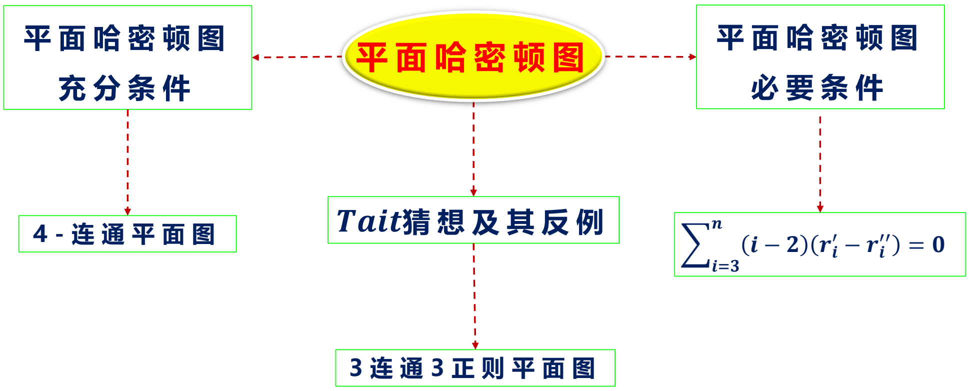

Figure 17: 平面哈密顿图示意图

- Tait 猜想: 3 连通 3 正则平面图都是哈密顿图.
- 反例: Tutte 图, Lederberg 图.
- 平面哈密顿图充分条件: 4 连通平面图是哈密顿图.
- 平面哈密顿图必要条件: r_i' 表示内部次数为 i 的面数, r_i'' 表示外部次数为 i 的面数, 则 $\sum_{i\geq 3}(i-2)(r_i'-r_i'')=0$.

7 图的着色

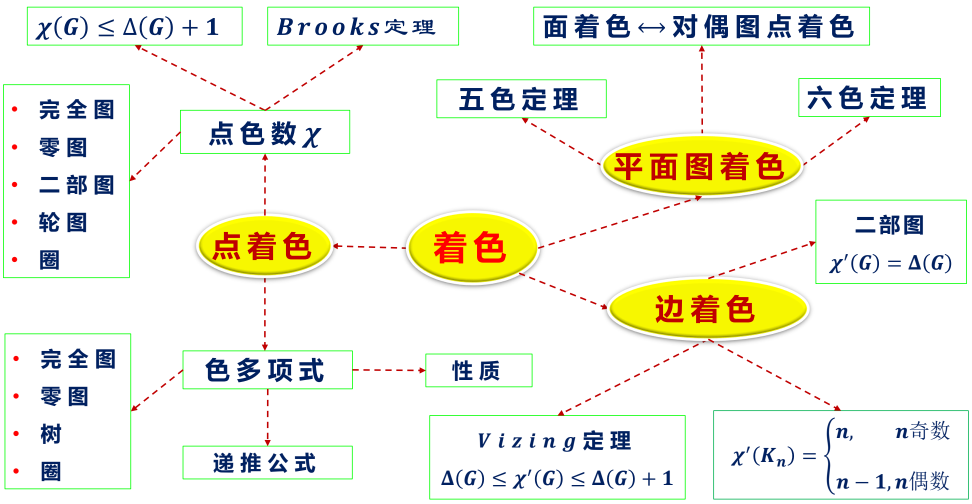

Figure 18: 图的着色示意图

- $\chi(G)\leq\Delta(G)+1$.
- Brooks 定理: 除完全图和奇圈外, $\chi(G)\leq\Delta(G)$.
- $\chi(K_n)=n$, $\chi(N_n)=1$.
- 二部图: $\chi(G)=2$, 若含有边, 否则 $\chi(G)=1$.

$$\chi(W_n)=\begin{cases}3, & \text{若 } n \text{ 为奇数}\\ 4, & \text{若 } n \text{ 为偶数}\end{cases}$$

奇圈: $\chi(C_n)=3$. 偶圈: $\chi(C_n)=2$.

- 着色可以得到独立集.
- $f(K_n,k)=k(k-1)\cdots(k-n+1)$.

- 色多项式的递推公式:
  - 删边: e 是 G 中的边, $f(G,k)=f(G-e,k)-f(G\setminus e,k)$.
  - 添边: (u,v) 不是 G 中的边, $f(G,k)=f(G\cup(u,v),k)+f(G\setminus(u,v),k)$.
- $f(T,k)=k(k-1)^{n-1}$.
- $f(C,k)=(k-1)^n+(-1)^n(k-1)$.
- 色多项式的性质: 常数项为 0, 首项系数为 1, k^{n-1} 的系数为 $-m$, 系数符号交替.
- 同构的图具有相同的色多项式, 但逆不真.

G 是 2-面可着色的 $\Longrightarrow$ G 是欧拉图

六色定理: 任何平面图都可 6-着色.

简单平面图 $\Rightarrow \delta(G)\le 5$.

五色定理(Heawood, 1890): 任何平面图都可 5-着色.

边着色: 同色边构成"边独立集"或"匹配".

8 支配集 覆盖集 独立集 匹配

点覆盖集: α_0, 边覆盖集: α_1.
点独立集: β_0, 边独立集(匹配): β_1.
支配集: γ_0, 团: ν_0.

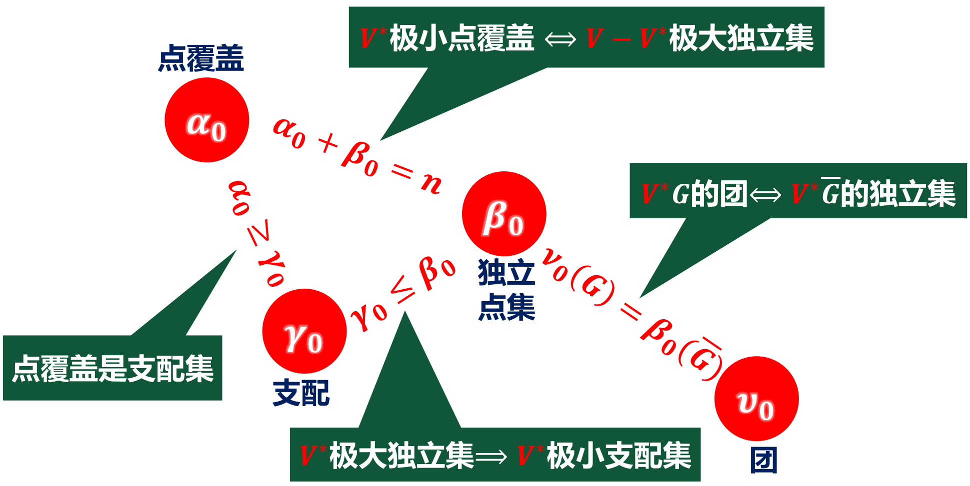

Figure 19: 支配集, 覆盖集, 独立集的关系示意图

- V^* 是极大独立集 $\Rightarrow$ V^* 是极小支配集.
  - 推论: $\gamma_0\le\beta_0$.
  - 极小支配集不一定是(极大)独立集.
- V^* 是 G 的团 $\Leftrightarrow$ V^* 是 $\overline{G}$ 的独立集.
  - 推论: $\nu_0(G)=\beta_0\left(\overline{G}\right)$.
- 无孤立点图中, V^* 是点覆盖集 $\Rightarrow$ V^* 是支配集.
  - 推论: $\gamma_0\le\alpha_0$.
  - 点覆盖加所有孤立点是支配集.
  - 极小点覆盖不一定是极小支配集.
  - 支配集不一定是点覆盖.
- 无孤立点, V^* 是点覆盖 $\Leftrightarrow$ $V-V^*$ 是独立集.
  - 推论: $\alpha_0+\beta_0=n$.

最大匹配与最小边覆盖的关系:

(i) 在最大匹配 M 上加入非饱和点集 N 得到边覆盖 $W = M \cup N$.

(ii) 在最小边覆盖 W_1 上删除相邻边 N_1 得到匹配 $M_1 = W_1 - N_1$.

(iii) $\alpha_1 + \beta_1 = n$.

$\beta_1 \leq \alpha_0$, $\beta_0 \leq \alpha_1$, $\beta_1 \leq \alpha_1$.

Figure 20: 支配集, 覆盖集, 独立集, 匹配的关系示意图

Theorem 8.1. 设 M_1, M_2 是 G 中 *2* 个不同匹配, 则 $G[M_1 \oplus M_2]$ 的每个连通分支是 M_1 和 M_2 中的边组成的交错圈或交错路径.

Theorem 8.2. 设 M 是 G 中匹配, Γ 是 M 的可增广路径, 则 $M' = M \oplus E(\Gamma)$ 也是 G 中匹配, 且 $|M'| = |M| + 1$.

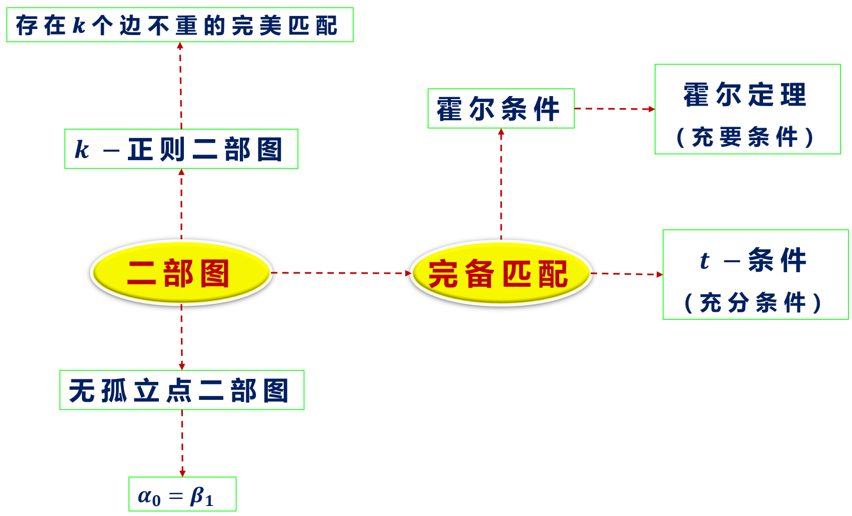

Figure 21: 二部图的匹配示意图

最大匹配: 贝尔热(Berge)定理.

- M 是 G 中最大匹配 $\Leftrightarrow$ G 中无 M 可增广路径.

完美匹配: 托特(Tutte)定理.

- G 有完美匹配 $\Leftrightarrow$ 对任意 $V' \subset V(G)$, 有 $p_{奇}(G - V') \leq |V'|$.
- 推论: 无桥 3-正则图有完美匹配.

(二部图的)完备匹配:

- 充要条件: 霍尔定理 $= \forall S \subseteq V_1, |S| \leq |N(S)|$.
- 充分条件: t-条件 $= V_1$ 中每个顶点至少关联 t 条边, 且 V_2 中每个顶点至多关联 t 条边.

完备匹配: $|V_1| \leq |V_2|$ 且 $|M| = |V_1|$.

k-正则二部图中存在 k 个边不重的完美匹配.

无孤立点二部图中 α_0 (点覆盖) $= \beta_1$ (匹配数).

9 图论练习题

Theorem 9.1. (Chvátal-Erdős 定理): 设 G 是 3 阶以上无向连通简单图, 且 G 中最大独立集的大小不超过 G 的点连通度, 证明: G 一定是哈密顿图.

Proof. 我们设 G 的顶点数为 n, 点连通度为 k, 最大独立集的大小为 $\alpha(G)$. 用反证法, 假设 G 不是哈密顿图. 我们取 G 中的一个最长回路 C, 由于 G 不是哈密顿图, 我们一定有 $|V(C)| < n$. 同时我们设 $C = x_1x_2...x_{|V(C)|}$. 同时一定有 $|V(C)| \geq k$, 可以考虑使用极大路径法证明图中一定有长度大于等于 $\delta(G)+1$ 的圈.

根据 Menger 定理, 我们选取 $u \notin V(C)$ 和 $\left\{x_{i_s} \mid x_{i_s} \in V(C), 1 \leq s \leq k\right\}$ (此处的下标按顺序排列), 则 G 中有 k 条不交的独立路径 $u - x_{i_s}(1 \leq s \leq k)$.

(i) u 没有到 x_{i_s+1} 的路径. 假设存在这样的路径, 那么我们可以舍弃 C 上的 $\left(x_{i_s}, x_{i_s+1}\right)$, 选择 $x_{i_s} - u - x_{i_s+1}$ 加入 C 中得到 C', 新增的这段路径的长度至少为 2, 因此 $|V(C')| > |V(C)|$, 矛盾.

(ii) x_{i_s+1} 没有到 x_{i_t+1} 的路径, $s \neq t$. 假设存在这样的路径, 那么我们可以舍弃 C 上的 $\left(x_{i_s}, x_{i_t+1}\right)$ (这一段长度为 $t-s+1$), 选择加入 $x_{i_s} - u - x_{i_t} - x_{i_s+1} - x_{i_t+1}$, 这一段长度至少为 $t-s+2$, 因此 $|V(C')| > |V(C)|$, 矛盾.

考虑上面两个结论, 我们发现 $\left\{x_{i_s+1}\right\}_{1 \leq s \leq k} \cup \{u\}$ 任意两点之间没有边相连, 这构成了一个大小为 $k+1$ 的独立集, 矛盾.

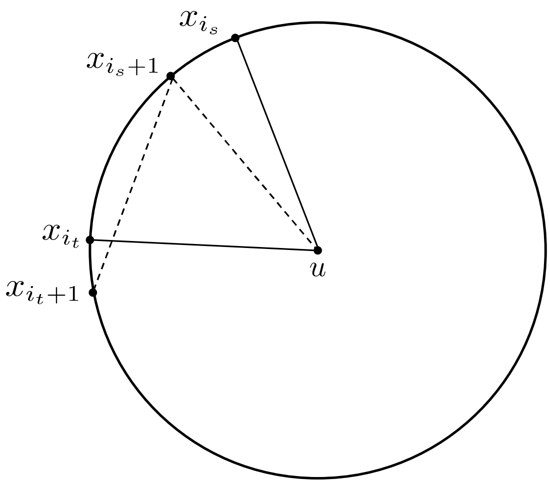

Figure 22: Chvátal-Erdős 定理证明示意图

□

***Question* 9.2.** 下面关于 n 阶简单连通无向图的 κ, λ, δ 比较关系的说法中, 可能会出现的情形是?

(i) $\kappa = \lambda = \delta = n-1$;

(ii) $1 \leq 2\delta - n + 2 \leq \kappa \leq \lambda = \delta \leq n-2$;

(iii) $0 \leq \kappa \leq \lambda \leq \delta < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$;

可图化 $\Leftrightarrow d_1 + d_2 + ... + d_n \equiv 0 (\bmod 2)$;
可简单图化 $\Leftrightarrow$ Havel 定理或者 Erdős-Gallai 定理.

Theorem 9.3. (Havel 定理): 给定 n 个非负整数 $d_1 \geq d_2 \geq ... \geq d_n$. 这些数是某个简单图的度数序列的充分必要条件是: $d' = \left(d_2 - 1, d_3 - 1, ..., d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, d_n\right)$ 可简单图化.

Theorem 9.4. (Erdős-Gallai 定理): 给定 n 个非负整数 $d_1 \geq d_2 \geq ... \geq d_n$. 这些数是某个简单图的度数序列的充分必要条件是: $\sum_{i=1}^{n} d_i$ 为偶数, 且对任意的 $k \in \{1, 2, ..., n\}$, 有 $\sum_{i=1}^{k} d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min(d_i, k)$.

Theorem 9.5. 设图 G 的直径大于 3, 则 G 的补图的直径 ≤ 3.

Proof. 图 G 的直径大于 3 意味着存在 $u, v \in V(G)$, 使得 $d_G(u, v) \geq 4$. 因为 G 是简单图, 所以 u 和 v 之间没有边相连, 因此 $(u, v) \in E\left(\overline{G}\right)$.

我们设 $P = N(u) \cup N(v)$, $Q = V - P$.
- P 中两点. 对任意的 $x \in N(u)$ 和 $y \in N(v)$ 在 G 中不相邻, 那么在 $\overline{G}$ 中必然相邻, 因此 $d_{\overline{G}}(x, y) = 1$. 那么如果是 $x_1, x_2 \in N(u)$, 他们之间的距离最多为 2.
- Q 中两点. Q 中任意一点现在均与 u 和 v 相邻, 因此可以走 $s \to u \to v \to t$ 的路径, $\forall s, t \in Q$.
- P 和 Q 中各取一点. $x \in P$, $y \in Q$. 如果 $x \in N(u)$, 则 $x \to V \to y$ 是一条长度为 2 的路径; 如果 $x \in N(v)$, 则 $x \to u \to y$ 是一条长度为 2 的路径.

□

证明: 若有向图 G 的底图 (指忽略边的方向后得到的无向图) 的色数为 k, 则 G 中必存在长度为 $k-1$ 的有向路径.
- $\ell(v)$ 表示从 v 出发的最长路径长度.
- 假设不存在, 证明 $\ell(v)$ 可以构成一种 $(k-1)$ 染色方案.

证明: 一棵树的完美匹配若存在则是唯一的.
- 假设有两个不同的完美匹配 M_1 和 M_2，则 $M_1 \oplus M_2$ 不为空，$G(M_1 \oplus M_2)$ 每个点的度数都为 2, 则有圈，与树矛盾.

证明: $\chi(G) + \chi\left(\overline{G}\right) \geq 2\sqrt{n}$.
- 设 $\chi(G) = k$, 则 $V(G)$ 可分为 k 个独立集 $V_1, V_2, ..., V_k$.
- 则 $\overline{G}$ 中每个 V_i 都是团, 则 $\chi\left(\overline{G}\right) \geq \max\{|V_i|\} \geq \frac{n}{k}$.
- 因此 $\chi(G) + \chi\left(\overline{G}\right) \geq k + \frac{n}{k} \geq 2\sqrt{n}$.

某镇有居民 1000 人, 每天他们中的每一个人把昨天听到的消息告诉所有认识的人. 已知任何消息, 只要镇上有人知道, 都会经这种方式逐渐地为全镇人知道. 求证: 可选出 90 个居民代表, 使得只要同时向他们传达某一消息, 经过 10 天后, 就会为全镇居民知道.
- 这个图是连通的. 可以去掉圈上的边得到一个生成树.
- 找到其中的一个最长的路径. 我们选取 v_{11} 作为一个居民代表, 左边的树离他的距离必然小于等于 10, 否则就有一个更长的路.
- 对右边的树也同样的处理.
- 那么 89 个这样的代表可负责把消息传递给 $89 \times 11 = 979$ 个人.
- 剩下的 21 个人, 任选 1 个作为代表, 则可负责把消息传递给剩下的 21 个人.

图 G 中的任意一个极大匹配的边数都大于等于其最大匹配的边数的一半.
- 设 M 是 G 的最大匹配, $|M| = m$. 则图中有 $n - 2|M|$ 个关于 M 的非饱和点.
- 这些非饱和点必然是点独立的.
- $n - 2|M| \leq \beta_0 \leq \alpha_1 = n - \beta_1 \Rightarrow |M| \geq \frac{1}{2}\beta_1$.